2024 年度 第 35 回

臨床試験 統計手法専門コース（35BioS）

入学試験

2024 年 4 月 18 日

参加番号	
組 織 名	
名　　前	

一般財団法人日本科学技術連盟

<u>以下の問題について，その導出過程を含めて解答せよ．</u>

問題1：微分・積分

以下の問いに答えよ. ただし, (1)及び(2)については, yで微分せよ.

(1). $y\log(y), (y > 0)$

(2). $\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$

(3). $\int_0^4 ye^y\,dy$

(4). $\int_1^4 ye^{y^2}\,dy$

(5). $\int_0^\infty y^2e^{-y}\,dy$

問題2：確率変数の標準化

次の文章の $\boxed{1}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ に入る数式, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ に入る数値, $\boxed{10}$ に入る用語を解答せよ.

確率変数Xの期待値を$E(X)$，分散を$V(X)$としたとき，Xを標準化するとX'= $\boxed{\ 1\ }$となる．X'の期待値は$\boxed{\ 2\ }$，分散は$\boxed{\ 3\ }$となる．偏差値は，平均値を$\boxed{\ 4\ }$，標準偏差を$\boxed{\ 5\ }$とする標準化の一種である．確率変数Yの期待値を$E(Y)$，分散を$V(Y)$としたとき，Yを標準化した確率変数をY'とする．X'とY'の共分散は，$E(X')$と$E(Y')$を用いて，$Cov(X', Y')$ = $\boxed{\ 6\ }$ − $\boxed{\ 7\ }$と表すことができる．X'とY'をXとYを用いた表記に戻すと，$Cov(X', Y')$ = $\boxed{8（分子）}$/$\boxed{9（分母）}$となり，これはXとYの$\boxed{\ 10\ }$である.

問題3：正規分布

ある糖尿病患者の集団におけるヘモグロビン A1c（HbA1c）は，平均 7，標準偏差 1 の正規分布に従うと仮定する．このとき，以下の問いに答えよ．なお，平均μ，分散σ^2の正規分布の確率密度関数は，以下のとおりである．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty$$

1. この集団の HbA1c が従う正規分布の確率密度関数を図示せよ．横軸の目盛り，縦軸の目盛りをそれぞれ入れること．
2. この集団の HbA1c が従う正規分布の累積分布関数を図示せよ．横軸の目盛り，縦軸の目盛りをそれぞれ入れること
3. この集団からランダムに 1 名の患者を抽出した場合に，HbA1c の値が 7 以下である確率を求めよ．
4. この集団からランダムに 1 名の患者を抽出した場合に，HbA1c の値が 5 未満であるおおよその確率を求めよ．

5. この集団からランダムに 10 名の患者を抽出した場合に，HbA1c の平均値の期待値と分散を求めよ．

問題4：同時確率と周辺確率

ある疾患に対する被験薬の効果を 3 段階（0 点，1 点，2 点）で評価することを考える．確率変数XとYをそれぞれ医師 X と医師 Y の評価点数として，その同時分布が以下のように与えられているとする．以下の問いに答えよ．

	$Y=0$	1	2
$X=0$	3/12	0	2/12
1	0	1/12	3/12
2	1/12	1/12	1/12

1. 医師 X の評価点数が 2 点未満かつ医師 Y の評価点数が 1 点未満となる同時確率 $\Pr(X<2 \cap Y<1)$を求めよ．
2. 医師 X の評価点(X) の周辺分布を求めよ．
3. 医師 X 及び医師 Y の評価点数の合計点$(X+Y)$の確率分布を求めよ．
4. 医師 X 及び医師 Y の評価点数の積(XY)の確率分布を求めよ．

問題5：ベルヌーイ分布の期待値と分散

確率変数Xは 1 となる確率π，0 となる確率が$1-\pi$のベルヌーイ分布に従うと仮定する．確率関数は，以下のとおりである．

$$f(x)=\begin{cases} \pi^x(1-\pi)^{1\text{-}x} & (x=0,1) \\ 0 & (others) \end{cases}$$

以下の問いに答えよ．

1. Xの期待値を求めよ．
2. X^2の期待値を求めよ．
3. X の分散を求めよ．
4. 確率変数Yを$Y=X_1+X_2$とする．ここで，確率変数X_1,X_2は互いに独立に問 1 と 3 で求めた期待値と分散のベルヌーイ分布に従うと仮定する．このとき，Yの分布名を示し，その期待値と分散を求めよ．

問題6：回帰分析

5 組のデータが以下のように得られており，目的変数をY，説明変数をXとして，最小 2 乗法を用いて回帰分析を行うことを考える．

x	1	2	3	4	5
y	6	7	5	8	10

切片及び説明変数Xに対する回帰係数から成るベクトル$\boldsymbol{\beta}$の推定値は，以下の式により求めることができる．

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^t X)^{-1} X^t \boldsymbol{y}$$

ここで, Xは計画行列を表し, 本回帰分析においては,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

となる.

以下の問いに答えよ.

1. Xの転置行列X^tを示せ.
2. $X^t X$を計算せよ.
3. 行列式$|X^t X|$を計算せよ.
4. 逆行列$(X^t X)^{-1}$を計算せよ.
5. 回帰係数の推定値$\hat{\boldsymbol{\beta}}$を求めよ.
6. 回帰モデルによる予測値$X\hat{\boldsymbol{\beta}}$を求めよ.
7. 回帰モデルについて，以下の分散分析表の①～⑨に入る数値を求めよ.

	平方和	自由度	平均平方	F 値
回帰	①	④	⑦	⑨
残差	②	⑤	⑧	
全体	③	⑥		